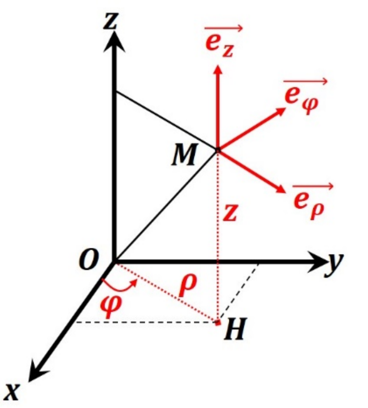
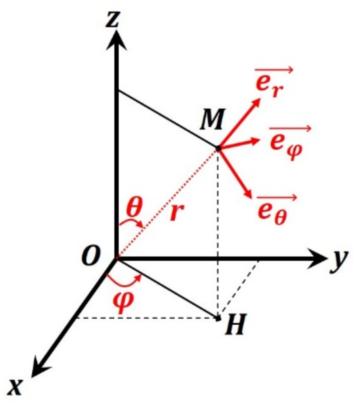
Coordonnées cylindriques et sphériques

Soit le repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. On étudie les systèmes de coordonnées cylindriques et sphériques associés.

Coordonnées cylindriques	***Coordonnées sphériques***
	

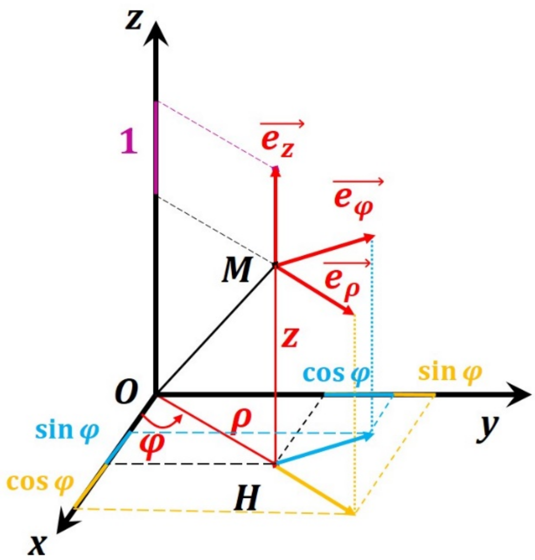
Repère cylindrique $(O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$

a) Le point M a pour coordonnées cylindriques (ρ, φ, z).

Dans la base associée, on vecteur position s'écrit : $\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{e_\rho} + z\overrightarrow{e_z}$**.**

b) On projette $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi$ et $\vec{e}_z$ selon les axes du repère cartésien comme représenté sur la figure ci-contre. Soit :

$$\vec{e}_\rho = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



c) On calcule les dérivées de $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi$ et $\vec{e}_z$ en dérivant leurs coordonnées puis on identifie le résultat aux coordonnées de $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi$ et $\vec{e}_z$ précédemment calculées :

$$\dot{\vec{e}}_\rho = \overset{\cdot}{\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -\dot\varphi\ \sin\varphi \\ \dot\varphi\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

$$\dot{\vec{e}}_\varphi = \overset{\cdot}{\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -\dot\varphi\ \cos\varphi \\ -\dot\varphi\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = -\dot{\varphi}\,\vec{e}_\rho$$

$$\dot{\vec{e}}_z = \vec{0}$$

d) Vitesse et accélération :

1. La vitesse est la dérivée du vecteur position, $\vec{v} = \frac{d}{dt}(\rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z)$, soit:

$$\vec{v} = \dot{\overbrace{\rho\vec{e}_\rho}} + \dot{\overbrace{z\vec{e}_z}} = (\dot\rho\vec{e}_\rho + \rho\dot\varphi\vec{e}_\varphi) + (\dot z\vec{e}_z + 0) = \dot\rho\vec{e}_\rho + \rho\dot\varphi\vec{e}_\varphi + \dot z\vec{e}_z$$

2. L'accélération est la dérivée du vecteur vitesse, $\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v}$, soit : $\vec{a} = \dot{\overbrace{\dot\rho\vec{e}_\rho}} + \dot{\overbrace{\rho\dot\varphi\vec{e}_\varphi}} + \dot{\overbrace{\dot z\vec{e}_z}} = (\ddot\rho\vec{e}_\rho +$

$$\vec{a} = \dot{\overbrace{\dot\rho\vec{e}_\rho}} + \dot{\overbrace{\rho\dot\varphi\vec{e}_\varphi}} + \dot{\overbrace{\dot z\vec{e}_z}} = (\ddot\rho\vec{e}_\rho + \dot\rho\dot\varphi\,\vec{e}_\varphi) + \big((\dot\rho\dot\varphi + \rho\ddot\varphi)\vec{e}_\varphi + \rho\dot\varphi(-\dot\varphi\,\vec{e}_\rho)\big) + (\ddot z\vec{e}_z + 0)$$

$$\vec{a} = (\ddot\rho - \rho\dot\varphi^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot\varphi + 2\dot\rho\dot\varphi)\vec{e}_\varphi + \ddot z\vec{e}_z$$

Repère sphérique $(\boldsymbol{O}, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$

a) Le point *M* a pour coordonnées cylindriques $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varphi})$.

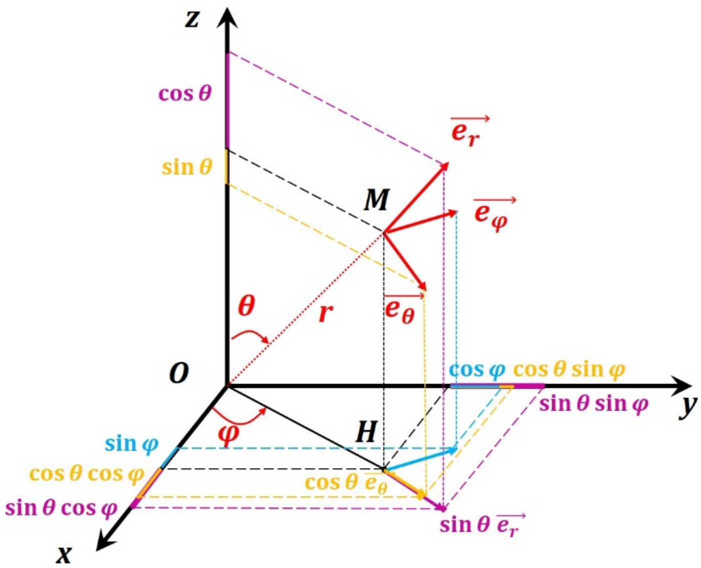
Dans la base associée, son vecteur position s'écrit $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \boldsymbol{r}\overrightarrow{\boldsymbol{e_r}}$**.**

b) On projette $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_\varphi$ selon les axes du repère cartésien comme représenté sur la figure ci-contre, soit :

$$\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sin\theta\cos\varphi} \\ \boldsymbol{\sin\theta\sin\varphi} \\ \boldsymbol{\cos\theta} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\cos\theta\cos\varphi} \\ \boldsymbol{\cos\theta\sin\varphi} \\ \boldsymbol{-\sin\theta} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\varphi}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{-\sin\varphi} \\ \boldsymbol{\cos\varphi} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$



c) On calcule les dérivées de $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_\varphi$ en dérivant leurs coordonnées puis on identifie le résultat aux coordonnées de $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_\varphi$ précédemment calculées :

$$\dot{\vec{e}}_r = \begin{pmatrix} \dot{\overline{\sin\theta\cos\varphi}} \\ \dot{\overline{\sin\theta\sin\varphi}} \\ \dot{\cos\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\,\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\dot{\varphi}\cos\varphi \\ -\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix} = \dot{\theta}\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} + \dot{\varphi}\sin\theta\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{\boldsymbol{e}}}_{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{\dot{\theta}}\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\dot{\varphi}\sin\theta}\,\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\varphi}}$$

$$\dot{\vec{e}}_\theta = \begin{pmatrix} \dot{\overline{\cos\theta\cos\varphi}} \\ \dot{\overline{\cos\theta\sin\varphi}} \\ -\dot{\sin\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{\theta}\sin\theta\cos\varphi - \cos\theta\,\dot{\varphi}\sin\varphi \\ -\dot{\theta}\sin\theta\sin\varphi + \cos\theta\dot{\varphi}\cos\varphi \\ -\dot{\theta}\cos\theta \end{pmatrix} = -\dot{\theta}\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} + \dot{\varphi}\cos\theta\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{\boldsymbol{e}}}_{\boldsymbol{\theta}} = -\boldsymbol{\dot{\theta}}\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{\dot{\varphi}\cos\theta}\,\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\varphi}}$$

$$\dot{\vec{e}}_\varphi = \begin{pmatrix} -\dot{\sin\varphi} \\ \dot{\cos\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{\varphi}\cos\varphi \\ -\dot{\varphi}\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \cdots$$

La décomposition de ce vecteur sur $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ n'est pas évidente : on va donc calculer ses composantes en faisant son produit scalaire avec les vecteurs de la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$. Une deuxième méthode consiste à utiliser des formules trigonométriques.

Première méthode : Pour projeter sur les vecteurs de base, on calcule les produits scalaires du vecteur avec les vecteurs de base.

$$\dot{\vec{e}}_{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}} = -\dot{\varphi}\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi\\ \cos\theta\end{pmatrix} = -\dot{\varphi}\left(\sin\theta\cos^2\varphi + \sin\theta\sin^2\varphi\right) = \boldsymbol{-\dot{\varphi}\sin\theta}$$

$$\dot{\vec{e}}_{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\theta}} = -\dot{\varphi}\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\theta\cos\varphi\\ \cos\theta\sin\varphi\\ -\sin\theta\end{pmatrix} = -\dot{\varphi}\left(\cos\theta\cos^2\varphi + \cos\theta\sin^2\varphi\right) = \boldsymbol{-\dot{\varphi}\cos\theta}$$

$$\dot{\vec{e}}_{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\varphi}} = -\dot{\varphi}\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix} = -\dot{\varphi}(-\cos\varphi\sin\varphi + \cos\varphi\sin\varphi) = \mathbf{0}$$

On note que la composante selon $\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\varphi}}$ est nulle : en effet, la dérivée d'un vecteur de norme constante est toujours perpendiculaire à celui-ci.

Donc au final:

$$\dot{\vec{e}}_{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{-\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_r - \dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e}_\theta}$$

Deuxième méthode :

$$\dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{pmatrix} = -\dot{\varphi}\begin{pmatrix}\cos\varphi\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\\ \sin\varphi\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\\ \sin\theta\cos\theta - \sin\theta\cos\theta\end{pmatrix} = -\dot{\varphi}\sin\theta\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi\\ \cos\theta\end{pmatrix} - \dot{\varphi}\cos\theta\begin{pmatrix}\cos\theta\cos\varphi\\ \cos\theta\sin\varphi\\ -\sin\theta\end{pmatrix}$$

On retrouve bien : $\dot{\vec{e}}_{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{-\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_r - \dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e}_\theta}$

d) Vitesse et accélération : on dérive dans $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$, en utilisant les vecteurs dérivés calculés en c) :

$$\dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi\ ,\ \dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta}\vec{e}_r + \dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e}_\varphi \text{ et } \dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_r - \dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e}_\theta$$

1. Vitesse

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \dot{\overrightarrow{OM}} = \dot{\overbrace{r\vec{e}_r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r = \dot{r}\vec{e}_r + r\left(\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi\right) = \boldsymbol{\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi}$$

2. Accélération

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \dot{\vec{v}} = \dot{\overbrace{r\vec{e}_r}} + \dot{\overbrace{r\dot{\theta}\vec{e}_\theta}} + \dot{\overbrace{r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi}} = \left(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r\right) + \left(\dot{\overbrace{r\dot{\theta}}}\,\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\vec{e}}_\theta\right) + \left(\dot{\overbrace{r\dot{\varphi}\sin\theta}}\,\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\dot{\vec{e}}_\varphi\right)$$

$$= \left(\ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi\right) + \left(\left(\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\left(-\dot{\theta}\vec{e}_r + \dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e}_\varphi\right)\right)$$
$$+ \left(\left(\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + r\left(\ddot{\varphi}\sin\theta + \dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\right)\right)\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\sin\theta\left(-\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_r - \dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e}_\theta\right)\right)$$

$$= \left(\boldsymbol{\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta}\right)\vec{e}_r + \left(\boldsymbol{2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta}\right)\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\theta}} + \left(\boldsymbol{2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta + r\ddot{\varphi}\sin\theta}\right)\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\varphi}}$$

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta}\\ \boldsymbol{r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta}\\ \boldsymbol{r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta}\end{pmatrix}$$